Время выполнения заданий – 240 минут

Максимальное количество баллов - 100

Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.

Задание 1 (17 баллов).

Для действительного числа $\alpha \in (0,1)$ рассмотрим возрастающую последовательность всех натуральных чисел m_i, для которых $\{m_i\alpha\} < \alpha$. Может ли для какого-то α соответствующая последовательность начинаться с

а) 2021,4041,6062?

б) 2021,4042,6062,8082?

Задание 2 (20 баллов).

В последовательности чисел 2^0, 2^1, 2^2, … некоторые члены умножили на -1, причем известно, что осталось бесконечно много положительных членов. Докажите что любое натуральное число представимо в виде суммы нескольких различных членов полученной последовательности.

Задание 3 (26 баллов).

В ряд стоят n домов k различных цветов, причем для любого цвета найдутся 100 стоящих подряд домов, среди которых домов этого цвета строго больше, чем домов любого другого цвета. При каком наибольшем k это возможно, если

а) $n = 84$?

б) $n = 86$?

Задание 4 (23 балла).

В угол AOC вписаны окружности Ω_1 и Ω_2 (радиус Ω_1 больше). Ω_1 касается сторон угла в точках A и B, а Ω_2 – в точках D и C соответственно. Точка M – середина отрезка BC. Прямые MA и MD вторично пересекают Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках X и Y. Прямые BX и CY пересекаются в точке Z. Докажите, что прямая MZ проходит через середину отрезка AD.

Задание 5 (28 баллов).

Дана пара взаимно-простых многочленов с действительными коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$ степеней 2021 и 2000 соответственно (*взаимно-простые* означает, что не существует многочлена $R(x)$, не равного константе, на который делятся $P(x)$ и $Q(x)$). Гриша выбирает конечное множество действительных чисел $c_1,\dots c_n$ (помните, в множестве элементы не повторяются, размер множества Гриша тоже выбирает сам), находит число различных кратных действительных корней у многочлена $P(x)+c_iQ(x)$ (при i от 1 до n) и складывает полученные числа. Какую наибольшую сумму Гриша может получить в результате этого процесса?

Задание 6 (38 баллов).

ABC – равносторонний треугольник на плоскости, а S – круг, концентрический с описанной окружностью треугольника ABC, но имеющий вдвое больший радиус, пусть его радиус равен 1. Применить к точке X на плоскости *операцию* – значит, отразить точку X симметрично относительно ближайшей вершины треугольника ABC (если ближайших вершин две, выбираем одну из двух произвольным образом).
а) Докажите, что любая точка плоскости за конечное число операций попадет в круг S.
б) Пусть d – расстояние от центра S до какой-то точки, попадающей в первый раз в круг S после ровно 2021 операции. Найдите промежуток возможных значений d.

Задание 7 (34 балла).

Для таблички $n \times n$ рассматриваем семейство квадратов 2×2, состоящих из клеток таблицы, и обладающее свойством: для любого квадрата семейства найдется покрытая им клетка, не покрытая никаким другим квадратом из семейства. Через $f(n)$ обозначим максимальное количество квадратов в таком семействе.
Для какого наименьшего C неравенство $f(n) \leq Cn^2$ верно при любом n?